

PRZYKŁADOWY ARKUSZ MATURALNY

Z MATEMATYKI

Poniedziałek, 19 kwietnia 2021

Materiały: OldSchool; tekst: Adam Konstantynowicz; konsultacja: Alicja Berman

Poziom podstawowy

Informacje dotyczące egzaminu maturalnego z matematyki w roku 2021 na poziomie podstawowym:

- maksymalna liczba punktów do zdobycia będzie wynosić 45, a nie 50, jak było w latach poprzednich,
- zadań zamkniętych będzie 28, a nie 25, czyli do uzyskania będzie 28 pkt, co stanowi ponad 62% wszystkich punktów,
- do uzyskania wymaganego progu 30% wystarczy dobrze rozwiązać 14 zadań zamkniętych,
- zadań otwartych będzie 7, a nie 9, czyli do uzyskania będzie 17 pkt, co stanowi pozostałe 38% wszystkich punktów,
- czas trwania egzaminu pozostaje bez zmian (170 min).

Na maturze z matematyki w 2021 roku na poziomie podstawowym nie będzie:

- zadań z potęg w kontekście fizycznym, chemicznym itp.,
- błędu bezwzględnego i względnego przybliżenia,
- równań typu $x^3 = -8$,
- wyznaczania max i min funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym,
- wykresów funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$,
- wykresów funkcji wykładniczych dla różnych podstaw,
- funkcji wykładniczych w kontekście zjawisk fizycznych, chemicznych itp.,
- przybliżania wartości funkcji trygonometrycznych (tablice trygonometryczne),
- własności okręgów stycznych,
- cech podobieństwa trójkątów w kontekście praktycznym (**UWAGA!** – samo podobieństwo zostaje, usunięto tylko kontekst praktyczny),
- kątów w ostrosłupach,
- brył obrotowych (walec, stożek, kula),
- kątów pomiędzy ścianami w graniastosłupach i ostrosłupach,
- określania, jaką figurą jest przekrój prostopadłościanu płaszczyzną,
- średniej ważonej,
- odchylenia standardowego.

Zadania zamknięte

W zadaniach od 1 do 28 wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)

Dane są liczby $a = 0,4 \cdot 10^{12}$ oraz $b = 0,625 \cdot 10^{18}$. Wtedy iloczyn ab jest równy

- A. $0,25 \cdot 10^6$
B. $2,5 \cdot 10^{-6}$
C. $2,5 \cdot 10^{-7}$
D. $2,5 \cdot 10^7$

Zadanie 2. (1 pkt)

Liczba $\frac{\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}}{(\frac{1}{2})^{-2}}$ jest równa

- A. 8
B. -8
C. $-\frac{1}{8}$
D. $\frac{1}{8}$

Zadanie 3. (1 pkt)

Liczbą odwrotną do liczby $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ jest liczba

- A. $3 + \sqrt{2}$
B. $\frac{\sqrt{2}-3}{7}$
C. $3 - \sqrt{2}$
D. $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$

Zadanie 4. (1 pkt)

Liczba $\log_{\frac{1}{3}} 81$ jest równa

- A. 4
B. $\frac{1}{4}$
C. $-\frac{1}{4}$
D. -4

Zadanie 5. (1 pkt)

Cenę pewnego towaru najpierw podwyższono o 20%, a następnie nową cenę obniżono o 10%. W wyniku obu tych zmian cena towaru zwiększyła się w stosunku do pierwotnej o

- A. 10%
B. 8%
C. 15%
D. 6%

Zadanie 6. (1 pkt)

Do zbioru rozwiązań nierówności $4 - (1 + 2x)^2 \geq 3 - 4x^2$ nie należy liczba

- A. $\sqrt{2}$
B. -5
C. -1
D. 0

Zadanie 7. (1 pkt)

Równanie $\frac{10-2x}{x^2-25} = 0$

- A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie trzy rozwiązania.

Zadanie 8. (1 pkt)

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3 - 2n$ dla $n \geq 1$. Różnica tego ciągu wynosi

- A. 1
B. 2
C. -2
D. -1

Zadanie 9. (1 pkt)

Suma czterech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym iloraz $q = 2$, wynosi -7,5. Suma pięciu kolejnych wyrazów tego ciągu jest równa

- A. -15,5
B. -24
C. -9,5
D. -10

Zadanie 10. (1 pkt)

Dane są punkty $A = (-10, -8)$ i $B = (5, 1)$. Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy

- A. $-\frac{3}{5}$
B. $-\frac{5}{3}$
C. $\frac{3}{5}$
D. $\frac{5}{3}$

Zadanie 11. (1 pkt)

Proste o równaniach $y = \frac{1}{1-m}x + \frac{m-2}{2}$ i $y = -2x + 1$ są prostopadłe, jeśli m jest równe

- A. 1
B. $-\frac{3}{2}$
C. $\frac{3}{2}$
D. -1

Zadanie 12. (1 pkt)

Punkt $A = (1, 2)$, a prosta AB jest równoległa do prostej $y = -3x + 2$. Punkt B może mieć współrzędne

- A. $(1, -2)$
B. $(3, -4)$
C. $(-2, 4)$
D. $(-3, 5)$

Zadanie 13. (1 pkt)

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 - 4x + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie

- A. $(-2, 15)$
B. $(2, -9)$
C. $(2, 13)$
D. $(-2, 7)$

Zadanie 14. (1 pkt)

Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2 - 3x - 4 = 0$ i $x_1 < x_2$. Wartość wyrażenia $3x_1 + x_2$ wynosi

- A. -1
B. 11
C. 1
D. 7

Zadanie 15. (1 pkt)

Do wykresu funkcji, określonej wzorem $f(x) = \frac{a}{x+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -1$ należy punkt $P = (2, -2)$. Wtedy a jest równe

- A. -2
B. -6
C. 6
D. 2

Zadanie 16. (1 pkt)

Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -n^2 + 81$ dla $n \geq 1$. Liczba nieujemnych wyrazów tego ciągu jest równa

- A. 9
B. 12
C. 8
D. 10

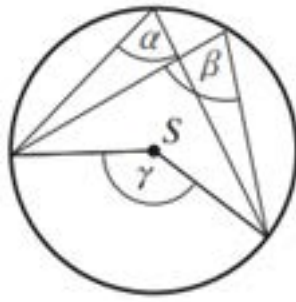
Zadanie 17. (1 pkt)

Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Wartość wyrażenia $1 + \tan \alpha$ jest równa

- A. $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$
D. $\frac{1+\sqrt{5}}{3}$

Zadanie 18. (1 pkt)

Dany jest okrąg o środku w punkcie S . Miara kąta α jest równa 65° (patrz rysunek). Różnica miar kątów γ i β jest równa



- A. 195°
B. 130°
C. 65°
D. 45°

Zadanie 19. (1 pkt)

Średnia wieku drużyny siatkarskiej wynosi 21 lat. Średnia wieku wszystkich zawodników i ich trenera jest równa 22 lata. Jeśli trener ma 34 lata, to liczba zawodników w drużynie jest równa

- A. 6
B. 10
C. 14
D. 12

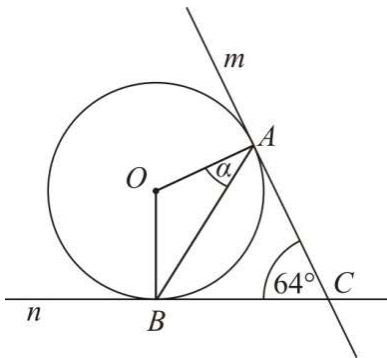
Zadanie 20. (1 pkt)

Ile jest wszystkich pięciocyfrowych liczb parzystych, w których występują wyłącznie cyfry 0, 3, 4, 7?

- A. 192
B. 384
C. 512
D. 768

Zadanie 21. (1 pkt)

Prosta m jest styczna do okręgu w punkcie A , zaś prosta n jest styczna do okręgu w punkcie B oraz $\sphericalangle BCA = 64^\circ$ (patrz rysunek).



Miara kąta α wynosi

- A. 16°
B. 32°
C. 26°
D. 34°

Zadanie 22. (1 pkt)

Punkt $S = (6, 2)$ jest środkiem odcinka AB , gdzie $A = (2a + 1, -4)$ i $B = (3, a - 2b)$. Zatem

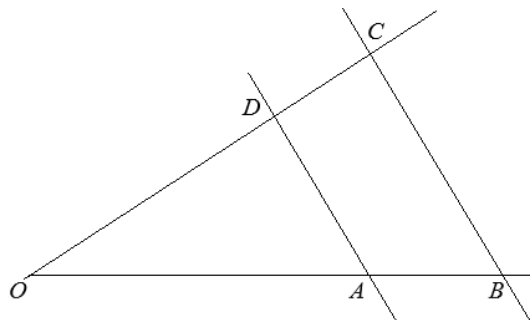
- A. $a = -4$ i $b = 2$
B. $a = 4$ i $b = -2$
C. $a = 4$ i $b = 2$
D. $a = -4$ i $b = -2$

Zadanie 23. (1 pkt)

Proste AD i BC są równoległe oraz $|OA| = 8$, $|AB| = 2$, $|BC| = 7$ (patrz rysunek).

Odcinek AD ma długość

- A. $\frac{4}{7}$
B. $\frac{14}{5}$
C. $\frac{28}{5}$
D. $\frac{24}{7}$



Zadanie 24. (1 pkt)

Przekątne równoległoboku mają długości 10 i 16, a kąt między tymi przekątnymi ma miarę 45° . Pole tego równoległoboku jest równe

- A. $80\sqrt{2}$
B. 40
C. $40\sqrt{2}$
D. 80

Zadanie 25. (1 pkt)

Doświadczenie losowe polega na rzucie dwiema symetrycznymi monetami i symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w wyniku rzutu tylko na jednej monecie wypadł orzeł, a na kostce jedno oczko, jest równe

- A. $\frac{1}{48}$
B. $\frac{1}{24}$
C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{1}{12}$

Zadanie 26. (1 pkt)

Mediana zestawu danych 1, 14, a , 11, 7, 3 jest równa 8. Zatem a wynosi

- A. 7
B. 8
C. 9
D. 10

Zadanie 27. (1 pkt)

Podstawą prostopadłościanu o wysokości 10 jest prostokąt o bokach długości 6 i 8. Kąt między przekątną tego prostopadłościanu a płaszczyzną podstawy ma miarę

- A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 90°

Zadanie 28. (2 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie są tej samej długości. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa 18. Wtedy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

- A. $2(6 + \sqrt{3})$
B. $5\sqrt{3}$
C. $14\sqrt{3}$
D. $6(2 + \sqrt{3})$

Zadania otwarte

Zadanie 29. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6 \geq 0$.

Zadanie 30. (2 pkt)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i dla każdej liczby rzeczywistej b

prawdziwa jest nierówność $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Zadanie 31. (2 pkt)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba oczek w pierwszym rzucie jest o 2 większa od liczby oczek w drugim rzucie.

Zadanie 32. (2 pkt)

Liczby $2x-9$, $x-1$, $x+3$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz siódmy wyraz tego ciągu.

Zadanie 33. (2 pkt)

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Punkt $P = (-6, 5)$ należy do paraboli będącej wykresem funkcji f . Ponadto $f(-5) = f(-1) = 0$. Oblicz odległość wierzchołka tej paraboli od początku układu współrzędnych.

Zadanie 34. (3 pkt)

Podstawy trapezu mają długości 2 cm i $(\sqrt{3} + 3)$ cm, a ramiona trapezu tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach 30° i 45° . Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 35. (4 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna o znanej długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

ROZWIĄZANIA arkusz I

Zadania zamknięte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
C	D	A	D	B	A	A	C	A	C	D	B	D	C

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
B	A	A	C	D	B	B	B	C	C	D	C	B	A

Zadania otwarte

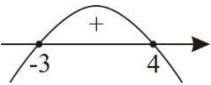
• **Zadanie 29.**

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6 \geq 0$$

$$-x^2 + x + 12 \geq 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49 \quad \sqrt{\Delta} = 7$$

$$x_1 = \frac{-1-7}{-2} = 4 \quad x_2 = \frac{-1+7}{-2} = -3$$



$$x \in \langle -3; 4 \rangle$$

• **Zadanie 30.**

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\frac{(a-b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad | \cdot 4$$

$$(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 - 2a^2 - 2b^2 \leq 0$$

$$-a^2 - 2ab - b^2 \leq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a+b)^2 \geq 0$$

• **Zadanie 31.**

Przy dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry otrzymujemy $6^2 = 36$ wyników, czyli: $\overline{\Omega} = 36$ (wynikami są pary liczb (a, b) , gdzie a oznacza wynik w pierwszym rzucie, b oznacza wynik w drugim rzucie). Wypisujemy wyniki sprzyjające zajściu zdarzenia A :

$$A = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\}.$$

$$\overline{A} = 4$$

Obliczamy prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

• **Zadanie 32.**

Korzystamy ze wzoru na średnią arytmetyczną:

$$x-1 = \frac{2x-9+x+3}{2}$$

$$2x - 2 = 3x - 6$$
$$x = 4$$

Wyznaczamy wyrazy ciągu:

$$a_1 = 2 \cdot 4 - 9 = -1$$

$$a_2 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = 4 + 3 = 7$$

Obliczamy różnicę ciągu:

$$r = 3 - (-1) = 4$$

Wyznaczamy wzór ogólny ciągu:

$$a_n = -1 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 5$$

Obliczamy a_7 :

$$a_7 = 4 \cdot 7 - 5 = 23$$

• **Zadanie 33.**

Z warunku zadania $f(-5) = f(-1) = 0$ wynika, że liczby -5 i -1 są miejscami zerowymi funkcji (pierwiastkami trójmianu f), więc możemy zapisać jej wzór w postaci iloczynowej $f(x) = a(x + 5)(x + 1)$.

Wstawiając współrzędne punktu $P = (-6, 5)$ obliczamy a :

$$5 = a(-6 + 5)(-6 + 1)$$

$$5 = 5a$$

$$a = 1$$

Jeśli liczby x_1 , x_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego, to pierwsza współrzędna p wierzchołka paraboli, będącej jego wykresem, jest średnią arytmetyczną pierwiastków (środkiem odcinka łączącego te pierwiastki na osi X -ów). W naszym przypadku $p = -3$. Druga współrzędna wierzchołka to wartość trójmianu w punkcie p , w naszym przypadku $f(-3) = -4$.

Współrzędne wierzchołka W paraboli wynoszą więc $(-3; -4)$, zatem odległość wierzchołka od początku układu współrzędnych obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$d^2 = (-3)^2 + (-4)^2$$

$$d^2 = 9 + 16$$

$$d^2 = 25$$

$$d = 5$$

• **Zadanie 34.**

Oznaczając wysokość trapezu jako x oraz biorąc pod uwagę kąty ostre, wykonujemy rysunek pomocniczy. Wyznaczamy x :

$$x\sqrt{3} + 2 + x = \sqrt{3} + 3$$

$$x(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} + 1$$

$$x = 1 \text{ cm}$$

Obliczamy pole powierzchni:

$$P = \frac{\sqrt{3} + 3 + 2}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3} + 5}{2} \text{ cm}^2$$

• **Zadanie 35.**

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku pomocniczym.

Uzależniamy wysokość h i krawędź podstawy a od przekątnej d .

$$\sin \alpha = \frac{h}{d}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{h}{d}$$

$$h = \frac{d}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

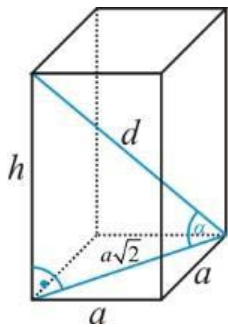
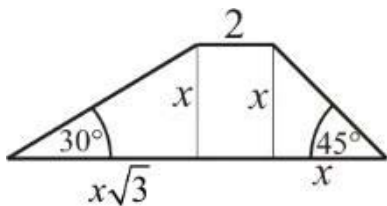
$$\cos \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{d}$$

$$a = \frac{2d}{3}$$

Obliczamy objętość graniastosłupa:

$$V = \left(\frac{2d}{3}\right)^2 \cdot \frac{d}{3} = \frac{4}{27} d^3$$



123 mm x 358,5 mm