wyborcza

MATURA 2020

MATEMATYKA – POZIOM PODSTAWOWY

Wtorek, 9 czerwca 2020

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

MMA 2020

WYPEŁNIA ZDAJĄCY	
KOD	PESEL

miejsce na naklejkę

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
POZIOM PODSTAWOWY

DATA: **5 maja 2020 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS PRACY: **170 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY
Uprawnienia zdającego do:
☐ dostosowania kryteriów oceniania
☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę
☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią

NOWA FORMUŁA

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 26 stron (zadania 1–34). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) zaznacz na karcie odpowiedzi, w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (26–34) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki, a także z kalkulatora prostego.
9. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
10. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

MMA-P1_1P-202

MMA 2020

W każdym z zadań od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Wartość wyrażenia $x^2 - 6x + 9$ dla $x = \sqrt{3} + 3$ jest równa

A. 1 **B.** 3 **C.** $1 + 2\sqrt{3}$ **D.** $1 - 2\sqrt{3}$

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{36^{10}}$ jest równa

A. 6^{70} **B.** 6^{45} **C.** $2^{30} \cdot 3^{20}$ **D.** $2^{10} \cdot 3^{20}$

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\log_5 \sqrt{125}$ jest równa

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** $\frac{3}{2}$

Zadanie 4. (0–1)

Cenę x pewnego towaru obniżono o 20% i otrzymano cenę y. Aby przywrócić cenę x, nową cenę y należy podnieść o

A. 25% **B.** 20% **C.** 15% **D.** 12%

Zadanie 5. (0–1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $3(1-x) > 2(3x-1) - 12x$ jest przedział

A. $\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ **D.** $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$

Zadanie 6. (0–1)

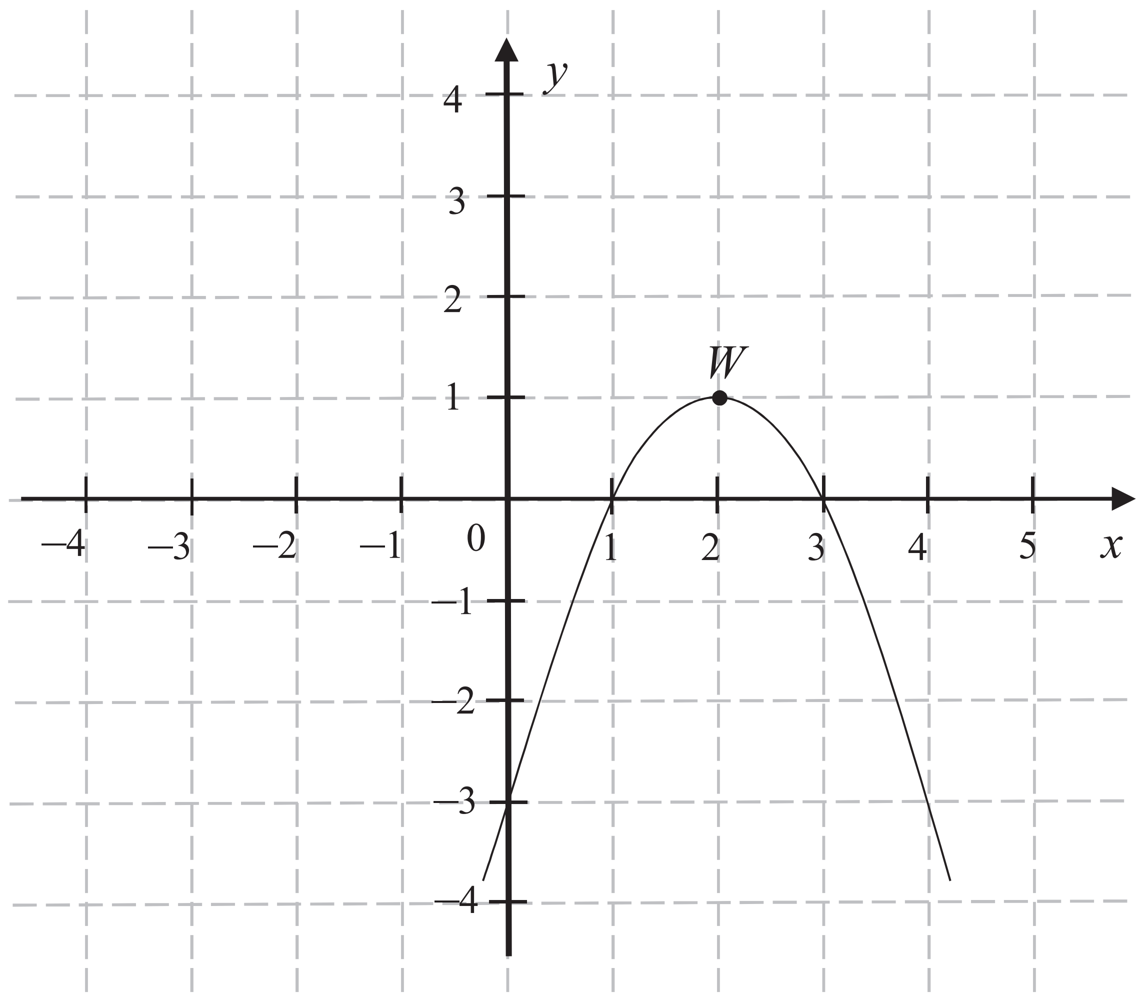
Suma wszystkich rozwiązań równania $x(x-3)(x+2) = 0$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Informacja do zadań 7.–9.

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x)=a(x-1)(x-3)$. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem tej funkcji. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W=(2,1)$.



Zadanie 7. (0–1)

Współczynnik a we wzorze funkcji f jest równy

A. 1 **B.** 2 **C.** –2 **D.** –1

Zadanie 8. (0–1)

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 4\rangle$ jest równa

A. –3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Zadanie 9. (0–1)

Osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f jest prosta o równaniu

A. $x=1$ **B.** $x=2$ **C.** $y=1$ **D.** $y=2$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

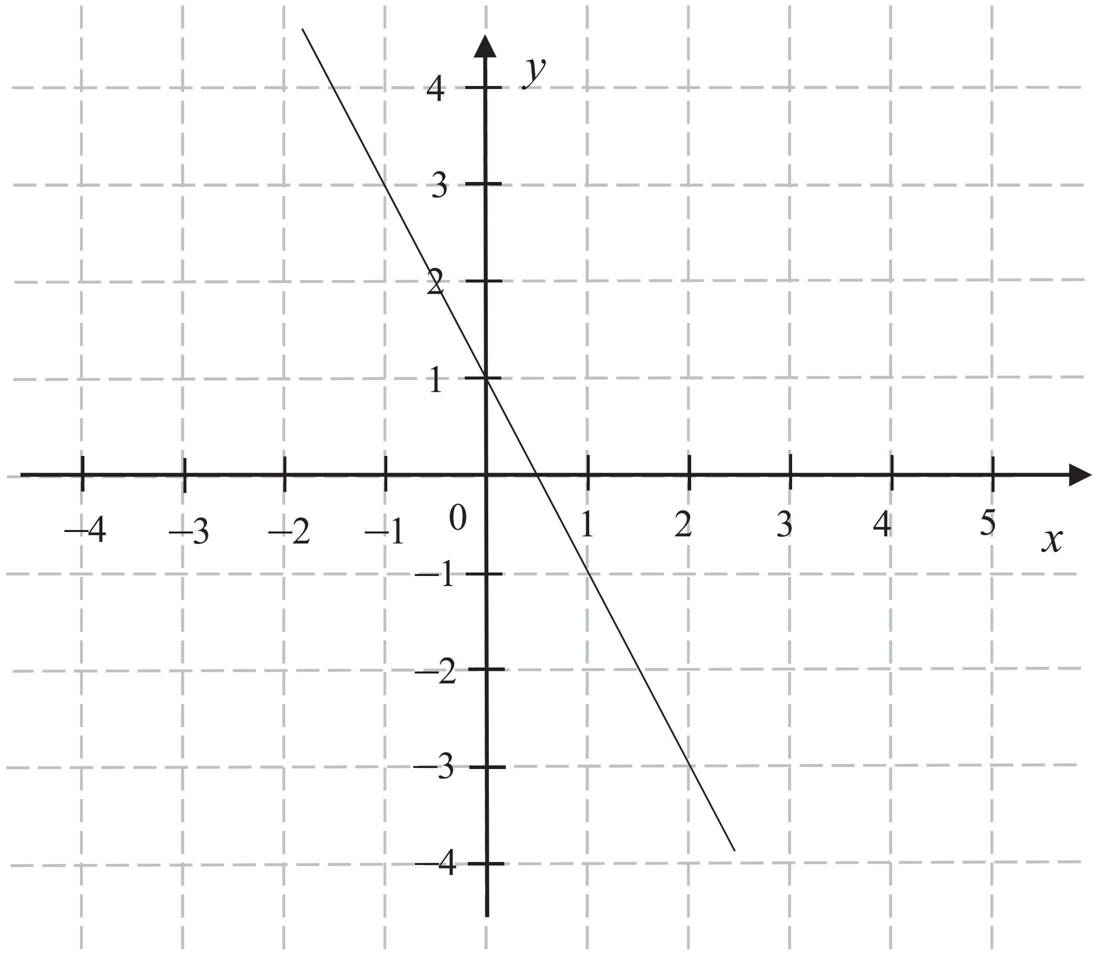
Zadanie 10. (0–1)

Równanie $x(x-2)=(x-2)^2$ w zbiorze liczb rzeczywistych

A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x=2$.
C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x=0$.
D. ma dwa różne rozwiązania: $x=1$ i $x=2$.

Zadanie 11. (0–1)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x)=ax+b$.



Współczynniki a oraz b we wzorze funkcji f spełniają zależność

A. $a+b>0$ **B.** $a+b=0$ **C.** $a\cdot b>0$ **D.** $a\cdot b<0$

Zadanie 12. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=4^{-x}+1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Liczba $f\left(\frac{1}{2}\right)$ jest równa

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 3 **D.** 17

Zadanie 13. (0–1)

Proste o równaniach $y=(m-2)x$ oraz $y=\frac{3}{4}x+7$ są równoległe. Wtedy

A. $m=-\frac{5}{4}$ **B.** $m=\frac{2}{3}$ **C.** $m=\frac{11}{4}$ **D.** $m=\frac{10}{3}$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 14. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2$ dla $n \geq 1$. Różnica $a_5 - a_4$ jest równa

A. 4 **B.** 20 **C.** 36 **D.** 18

Zadanie 15. (0–1)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, czwarty wyraz jest równy 3, a różnica tego ciągu jest równa 5. Suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ jest równa

A. – 42 **B.** –36 **C.** –18 **D.** 6

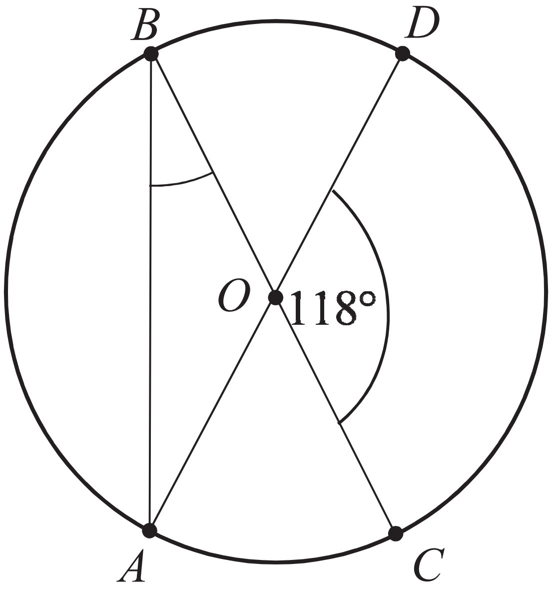
Zadanie 16. (0–1)

Punkt $A = \left(\frac{1}{3}, -1\right)$ należy do wykresu funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = 3x + b$. Wynika stąd, że

A. $b = 2$ **B.** $b = 1$ **C.** $b = -1$ **D.** $b = -2$

Zadanie 17. (0–1)

Punkty *A*, *B*, *C*, *D* leżą na okręgu o środku w punkcie *O*. Kąt środkowy *DOC* ma miarę 118° (zobacz rysunek).



Miara kąta *ABC* jest równa

A. 59° **B.** 48° **C.** 62° **D.** 31°

Zadanie 18. (0–1)

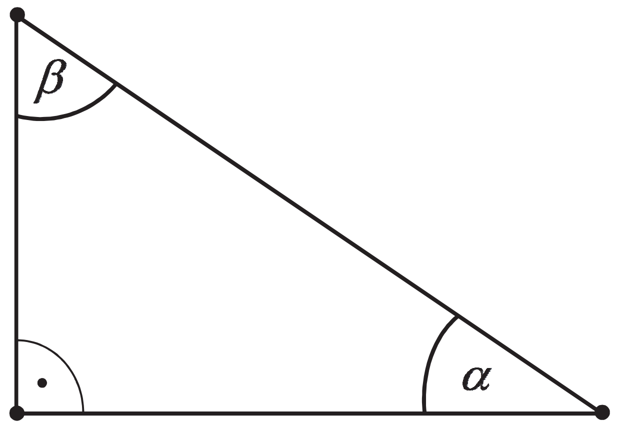
Prosta przechodząca przez punkty $A = (3, -2)$ i $B = (-1, 6)$ jest określona równaniem

A. $y = -2x + 4$ **B.** $y = -2x - 8$ **C.** $y = 2x + 8$ **D.** $y = 2x - 4$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 19. (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β (zobacz rysunek).



Wyrażenie $2\cos\alpha - \sin\beta$ jest równe

A. $2\sin\beta$ **B.** $\cos\alpha$ **C.** 0 **D.** 2

Zadanie 20. (0–1)

Punkt B jest obrazem punktu $A = (-3, 5)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych. Długość odcinka AB jest równa

A. $2\sqrt{34}$ **B.** 8 **C.** $\sqrt{34}$ **D.** 12

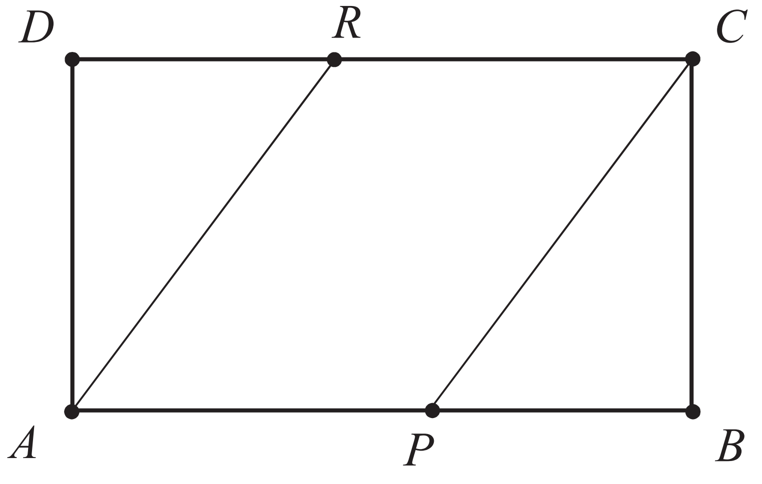
Zadanie 21. (0–1)

Ile jest wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych utworzonych z cyfr: 1, 3, 5, 7, 9, w których cyfry się nie powtarzają?

A. 10 **B.** 15 **C.** 20 **D.** 25

Zadanie 22. (0–1)

Pole prostokąta $ABCD$ jest równe 90. Na bokach AB i CD wybrano – odpowiednio – punkty P i R, takie, że $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|CR|}{|RD|} = \frac{3}{2}$ (zobacz rysunek).



Pole czworokąta $APCR$ jest równe

A. 36 **B.** 40 **C.** 54 **D.** 60

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 23. (0–1)

Cztery liczby: 2, 3, a, 8, tworzące zestaw danych, są uporządkowane rosnąco. Mediana tego zestawu czterech danych jest równa medianie zestawu pięciu danych: 5, 3, 6, 8, 2. Zatem

A. $a=7$ **B.** $a=6$ **C.** $a=5$ **D.** $a=4$

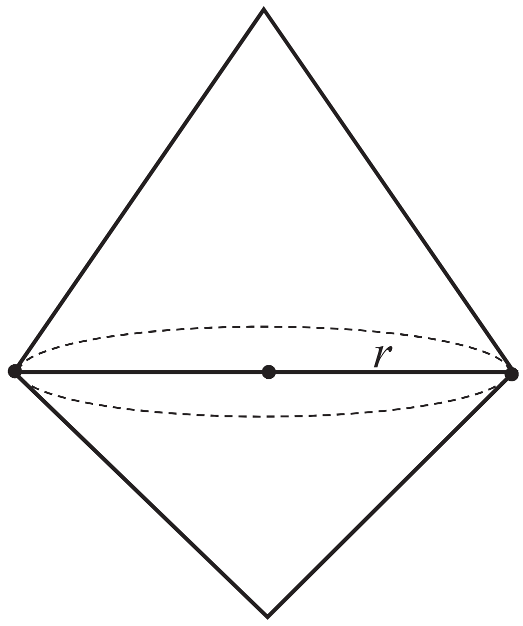
Zadanie 24. (0–1)

Przekątna sześcianu ma długość $4\sqrt{3}$. Pole powierzchni tego sześcianu jest równe

A. 96 **B.** $24\sqrt{3}$ **C.** 192 **D.** $16\sqrt{3}$

Zadanie 25. (0–1)

Dwa stożki o takich samych podstawach połączono podstawami w taki sposób jak na rysunku. Stosunek wysokości tych stożków jest równy $3:2$. Objętość stożka o krótszej wysokości jest równa $12\ \text{cm}^3$.



Objętość bryły utworzonej z połączonych stożków jest równa

A. $20\ \text{cm}^3$ **B.** $30\ \text{cm}^3$ **C.** $39\ \text{cm}^3$ **D.** $52{,}5\ \text{cm}^3$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2(x-1)(x+3) > x-1$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $\left(x^2-1\right)\left(x^2-2x\right)=0$.

Odpowiedź: ....

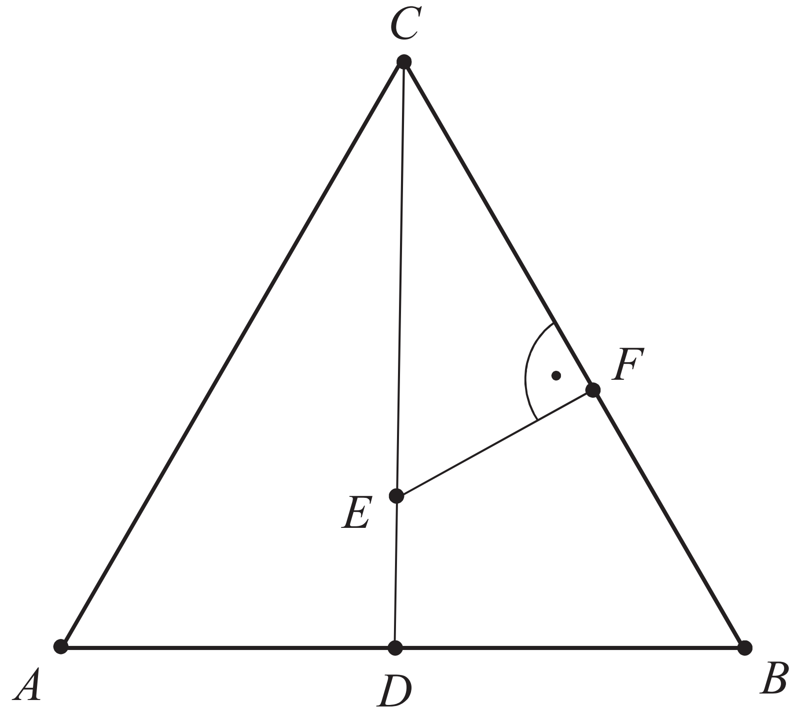
Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$a(a-2b)+2b^2>0\,.$$

Zadanie 29. (0–2)

Trójkąt ABC jest równoboczny. Punkt E leży na wysokości CD tego trójkąta oraz $|CE| = \frac{3}{4}|CD|$.
Punkt F leży na boku BC i odcinek EF jest prostopadły do BC (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$.

Zadanie 30. (0–2)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że co najmniej jeden raz wypadnie ścianka z pięcioma oczkami.

Odpowiedź: ....

Zadanie 31. (0–2)

Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha} = 4$. Oblicz tangens kąta α.

Odpowiedź: ....

Zadanie 32. (0–4)

Dany jest kwadrat *ABCD*, w którym $A=\left(5,-\frac{5}{3}\right)$. Przekątna *BD* tego kwadratu jest zawarta w prostej o równaniu $y=\frac{4}{3}x$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych *AC* i *BD* oraz pole kwadratu *ABCD*.

Odpowiedź: ....

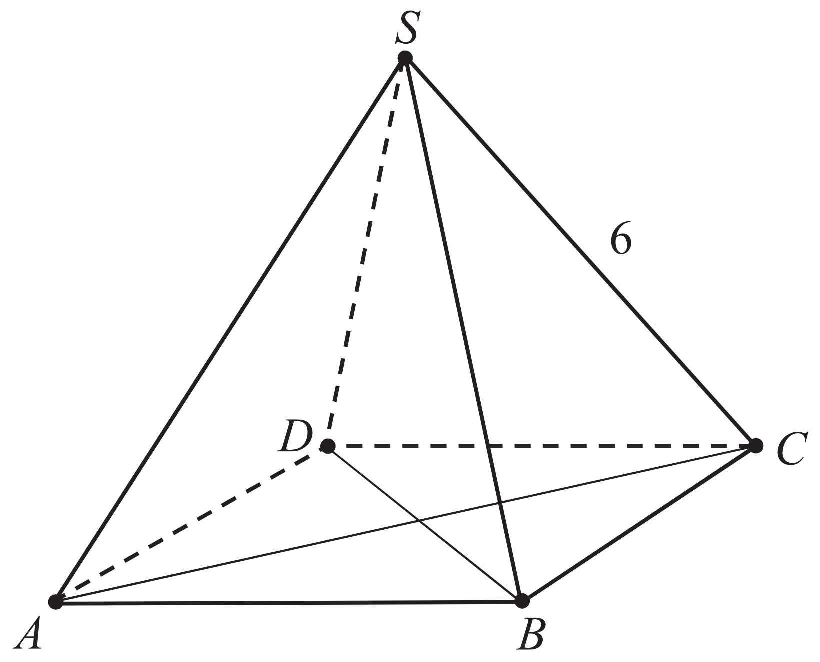
Zadanie 33. (0–4)

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, są dodatnie. Wyrazy tego ciągu spełniają warunek $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$. Oblicz iloraz q tego ciągu należący do przedziału $\left\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \right\rangle$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 34. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$, którego krawędź boczna ma długość 6 (zobacz rysunek). Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy $\sqrt{7}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Odpowiedź: ....

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Odpowiedzi

1b

2c

3d

4a

5a

6b

7d

8c

9b

10b

11d

12b

13c

14d

15c

16d

17d

18a

19b

20a

21c

22c

23a

24a

25b

26

$$2(x-1)(x+3) > x-1$$

$$2x^2 + 3x - 5 > 0$$

$$x \in \left(-\infty, , -\frac{5}{2}\right) \cup (1, +\infty)$$

27.

$$(x^2-1)(x^2-2x)=0$$

$$(x-1)(x+1)\cdot x(x-2)=0$$

Zatem rozwiązaniami tego równania są liczby: $-1, 0, 1, 2$.

28.

Założenie: $a \neq b$

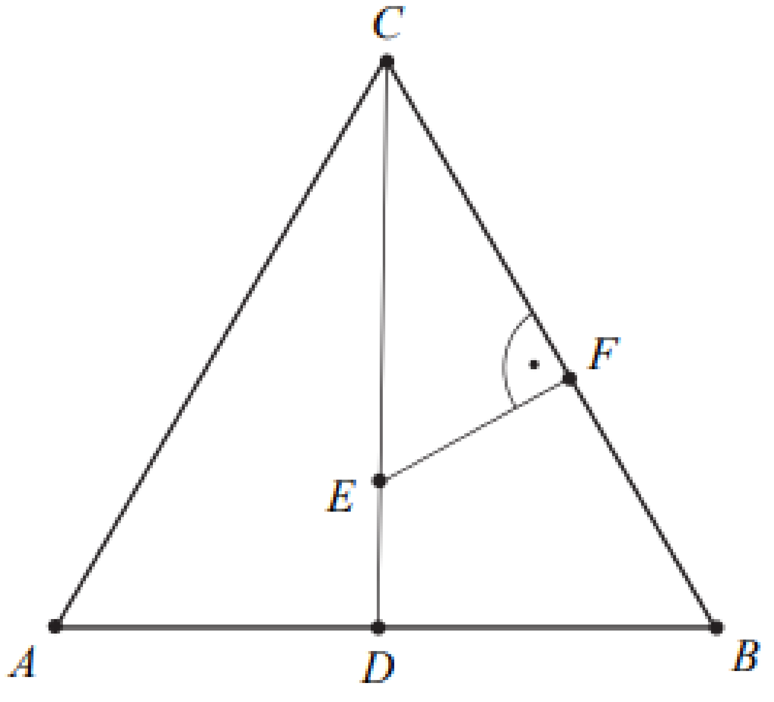
Przekształćmy równoważnie tezę:

$$a^2-2ab+b^2+b^2>0$$

$$(a-b)^2+b^2>0$$

Pierwszy składnik sumy jest dodatni, ponieważ $a \neq b$, a drugi składnik jest nieujemny. Zatem suma jest dodatnia co kończy dowód.

29.



Trójkąt ABC jest równoboczny, zatem długości boków trójkąta DBC możemy oznaczyć: $(x>0)$

$$|DB|=x$$

$$|BC|=2x$$

$$|CD|=x\sqrt{3}$$

Z treści zadania:

$$|CE|=\frac{3}{4}\cdot|CD|=\frac{3}{4}\cdot x\sqrt{3}=\frac{3x\sqrt{3}}{4}$$

Trójkąt CFE jest podobny do trójkąta DBC na podstawie cechy podobieństwa KKK (oba trójkąty mają kąty wewnętrzne o miarach: $30^o, 60^o, 90^o$).

Skala podobieństwa wynosi:

$$k = \frac{\frac{3x\sqrt{3}}{4}}{2x} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Stąd:

$$|CF| = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot x\sqrt{3} = \frac{9}{8}x = \frac{9}{16} \cdot 2x = \frac{9}{16}|BC|$$

Co kończy dowód.

30.

Wszystkie możliwe wyniki dwukrotnego rzutu kostką:

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	**15**	16
2	21	22	23	24	**25**	26
3	31	32	33	34	**35**	36
4	41	42	43	44	**45**	46
5	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
6	61	62	63	64	**65**	66

Wyniki sprzyjające zdarzeniu A zostały pogrubione w tabeli.

Zatem

$$P(A) = \frac{11}{36}$$

31.

$$\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha} = 4$$

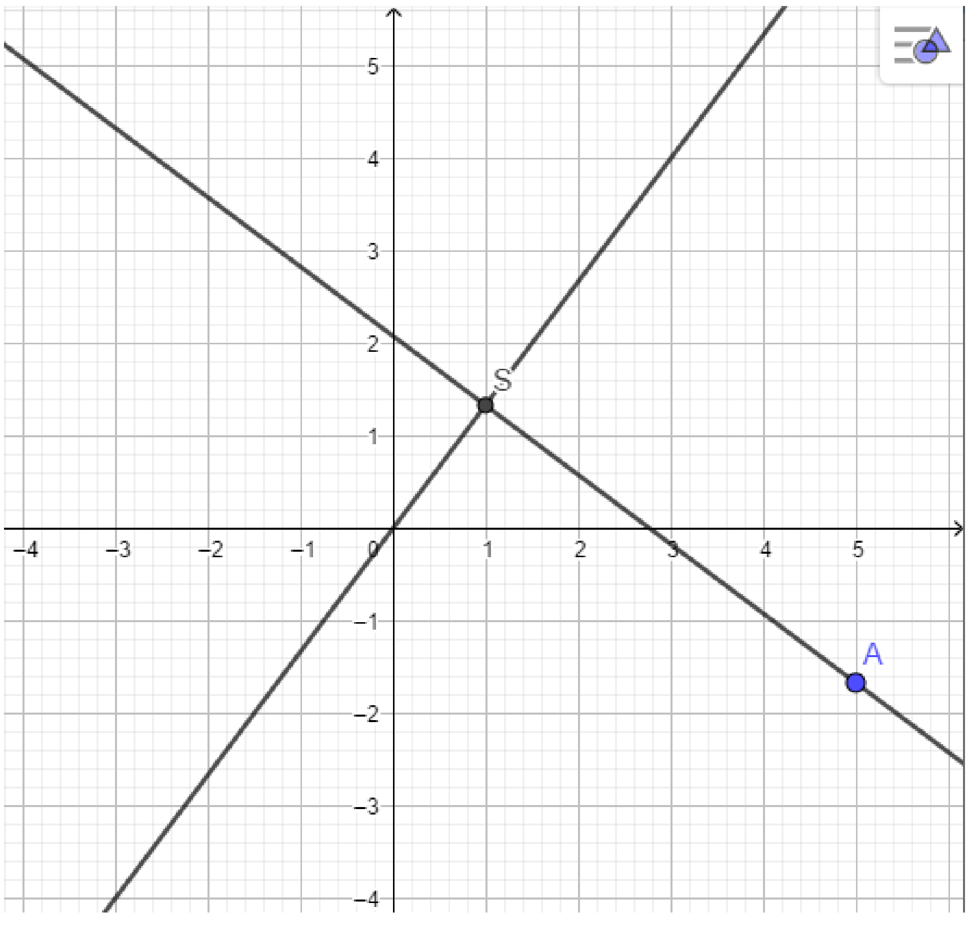
$$2\sin\alpha + 3\cos\alpha = 4\cos\alpha$$

$$2\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$$

32.



Screen z programu GEOGEBRA

Przekątne w kwadracie są prostopadłe, zatem równanie prostej AC ma postać: $y = -\frac{3}{4}x + b$. Do tej prostej należy punkt A:

$$-\frac{5}{3} = -\frac{3}{4} \cdot 5 + b$$

$$b = \frac{25}{12}$$

Równanie prostej AC: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{12}$

Punkt przecięcia się przekątnych:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Długość przekątnej AC

$$|AC| = 2|AS| = 2\sqrt{(1-5)^2 + \left(-\frac{5}{3} - \frac{4}{3}\right)^2} = 10$$

Pole kwadratu

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$$

33

$a_1 > 0$

$$6a_1 - 5a_1 q + a_1 q^2 = 0$$

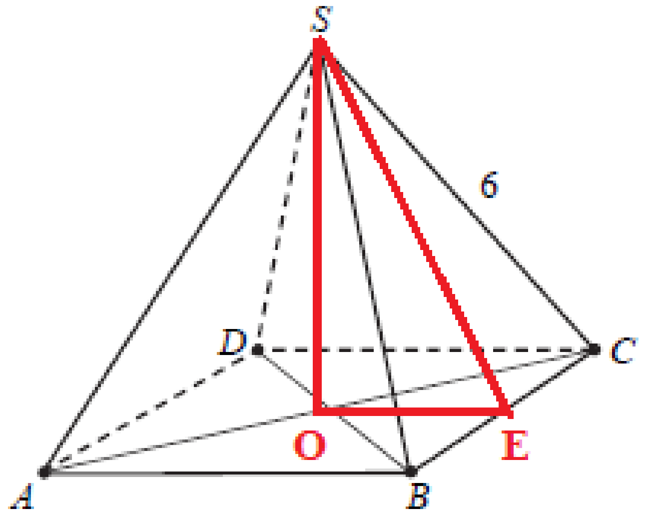
$$6 - 5q + q^2 = 0$$

$$q = 2, \qquad q = 3$$

Z treści zadania: $q \in \langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\rangle$

Zatem $q = 3$

34.



$$\mathrm{tg}(\sphericalangle SEO) = \sqrt{7}$$

Oznaczmy: $(x > 0)$

$$|AB| = x$$

Zatem $|OE| = \frac{1}{2}x,\ \ |OS| = \frac{\sqrt{7}}{2}x,\ \ |OC| = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie OCS:

$$\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 6^2$$

$$x = 4$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{7} = \frac{32\sqrt{7}}{3}$$